Dzień pierwszy - grupa młodsza

1. Liczbę całkowitą nazywamy palindromem, jeśli pozostaje ona taka sama po zamianie kolejności cyfr, np. 83438 lub 124421. Przyjmijmy, że liczby x oraz $x + 142$ są odpowiednio: trzycyfrowym oraz czterocyfrowym palindromem. Wyznacz wszystkie możliwe wartości x.

2. Wyznacz największą liczbę n taką, że n^2 jest dzielnikiem liczby $12! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 12$.

3. Rozważmy łańcuch n siódemek postaci $777\ldots77$, pomiędzy które wstawiamy znaki $+$, aby otrzymać wyrażenie arytmetyczne. Na przykład $7 + 77 + 777 + 7 + 7 = 875$ może być w ten sposób otrzymane z ośmiu siódemek. Załóżmy, że dla pewnych n możliwe jest takie ustawienie znaków $+$ pomiędzy n siódemkami, by otrzymać w wyniku powstającego w ten sposób działania liczbę 7000. Wykaż, że wszystkie takie liczby n dają resztę 1 z dzielenia przez 9.

4. Sześciokąt wpisany w okrąg ma boki długości odpowiednio: $22, 22, 20, 22, 22, 20$ − w tej kolejności. Znajdź promień tego okręgu.

5. Aby wykonać pewne duże zlecenie firma zatrudniła 1000 pracowników. Każdy z nich wykonuje pracę w tym samym tempie i zgodnie z obliczeniami firmy 1000 ludzi to dokładnie tylu ilu potrzeba, by pracę skończyć w rok. Zanim wykonano $1/4$ pracy wszyscy pracownicy byli na stanowiskach. Gdy $1/4$ pracy została wykonana zwolniono 100 pracowników. Drugą ćwiartkę pracy wynonano zatem wolniej niż zakładał to plan produkcji. Mimo to, gdy skończono połowę pracy zwolniono kolejnych 100 pracowników, więc wykonanie kolejnej ćwiartki pracy zabrało jeszcze więcej czasu niż w przypadku poprzedniej, a opóźnienie wzrosło. Aby wyrobić się w czasie jednego roku (lub mniej) firma planuje zatrudnić dodatkowych pracowników do wykonania pozostałej $1/4$ pracy. Ilu przynajmniej pracowników musi w tym celu zatrudnić?

Dzień pierwszy - grupa młodsza - rozwiązania

1. Jest jasne, że czterocyfrowy palindrom nie może być liczbą większą niż 1141. W przeciwnym razie x nie byłby liczbą trzycyfrową. Są jedynie dwa czterocyfrowe palindromy mniejsze niż 1141: 1001 oraz 1111. Zauważmy jednak, że $1001 - 142 = 859$. Natomiast $1111 - 142 = 969$. Zatem $x = 969$. Wykazaliśmy jednocześnie, że jest to jedyna możliwa wartość x.

2. Liczba $12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. Zatem największy kwadrat dzielący tę liczbę to $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Zatem szukana liczba to $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1440$.

3. Zauważmy, że niezależnie od n sumy uzyskiwane przez wstawianie znaków $+$, o ile mają dać wynik 7000, nie mogą zawierać żadnego składnika czterocyfrowego. Załóżmy zatem, że dla pewnego n mamy a składników równych 777, b składników równych 77, oraz c składników równych 7. Zatem $777 \cdot a + 77 \cdot b + 7 \cdot c = 7000$. Liczba siódemek wynosi n, w tym $3a$ siódemek pochodzących od składników równych 777, $2b$ siódemek pochodzących od składników równych 77 oraz c siódemek pochodzących od składników równych 7. Stąd mamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 111a + 11b + c = 1000 \\ 3a + 2b + c = n \end{cases}.$$

   Stąd odejmując stronami dostajemy: $108a + 9b = 1000 - n$. Skoro a, b, n są liczbami cakowitymi, zaś lewa strona równania jest liczbą podzielną przez 9, to także $1000 - n$ musi być podzielne przez 9. Dzieje się to tylko wtedy, gdy n daje resztę 1 z dzielenia przez 9.

4. Załóżmy, że rozważany sześciokąt ma wierzchołki $ABCDEF$ przy czym $|AB| = |DE| = 20$, zaś $|BC| = |CD| = |EF| = |FA| = 22$. Zauważmy, że czworokąty $ABCF$ oraz $CDEF$ są przystającymi trapezami równoramiennymi. Istotnie, niech $\alpha = \measuredangle BDC$. Skoro $|BC| = |AF|$ to z twierdzenia o kątach wpisanych dostajemy, że miarę α mają także kąty: $\measuredangle BFC$, $\measuredangle BAC$ oraz $\measuredangle ACF$ i $\measuredangle ABF$. Zatem proste AB oraz CF są równoległe. Analogicznie wykazujemy, że proste CF oraz DE są równoległe. Zauważmy dalej, że CF jest średnicą okręgu, w który wpisany jest sześciokąt $ABCDEF$. Istotnie, trójkąty ACF oraz ECF są przystające, a na czworokkącie $ACEF$ można opisać okrąg. Zatem suma miar kątów CAF oraz CEF równa jest $180°$. Kąty te są jednak tej samej miary, a zatem każdy z nich ma $90°$. Zatem CF to istotnie średnica. Szukany promień jest zatem równy $\frac{1}{2}|CF|$. Długość tego odcinka wyznaczamy natomiast korzystając z tw. Pitagorasa.

5. Pierwszą część pracy ukończono w $t_1 = 1/4$ roku. Drugą część pracy ukończono w $t_2 = 1000/900 \cdot t_1$ czasu. Trzecią część pracy wykonano w $t_3 = 1000/800 \cdot t_1$ czasu. Z dodatkową ilością pracowników ostatnią część pracy wykonano w t_4 roku. Zatem $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$. Skoro pracownicy mają te samo tempo, to $t_1 = 1/4$, zatem podstawiając do równania dostajemy $t_4 = 23/26$. Zatem $1000/(1000 + x) \geqslant 23/26$, gdzie x jest pewną liczbą całkowitą. Łatwo sprawdzić, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą powyższą nierówność jest 766.

Dzień drugi - grupa młodsza

1. Dla każdego n całkowitego dodatniego określamy wyrażenie S_n wzorem:

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1} n.$$

   Wyznacz wartość wyrażenia $S_{17} + S_{33} + S_{50}$.

2. Dane są dwa prostokąty o równych polach i o równych obwodach. Wykaż, że długości przekątnych obu prostokątów są takie same.

3. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od punktu S. Wykaż, że $|AB| > 2|CD|$. *Wskazówka: nierówność trójkąta.*

4. Czwórka liczb całkowitych dodatnich a, b, c oraz d mają tę własność, że $abcd = 8!$ oraz:

$$\begin{cases} ab + a + b = 524 \\ bc + b + c = 146 \\ cd + c + d = 104 \end{cases}.$$

   Wyznacz $a - d$.

5. Grupa księgowych otrzymuje zadanie rozliczenia 1775 faktur. Każdy księgowy rozlicza (pracując w stałym tempie) 30 faktur na godzinę. Pod koniec pierwszej godziny pewna liczba księgowych zostaje przeniesiona do innego zadania. Pod koniec drugiej godziny pracy kolejna, tak samo liczna, grupa księgowych zostaje odłączona od grupy. Podobnie dzieje się po trzeciej godzinie pracy. Grupa kończy zadanie w 3 godziny i 10 minut. Jaką liczbę faktur rozliczono podczas pierwszych 90 minut pracy tego zespołu zakładając, że liczba faktur rozliczonych w tym czasie jest całkowita?

Dzień drugi - grupa młodsza - rozwiązania

1. Wykazujemy, na przykład przez indukcję, że:

$$S_n = \begin{cases} -n/2, & \text{dla parzystych} n \\ (n+1)/2, & \text{dla nieparzystych} n. \end{cases}$$

Zatem $S_{17} = 9, S_{33} = 17$, zaś $S_{50} = -25$. Zatem suma tych wyrażeń to 1.

2. Zadanie pochodzi z I etapu VII OMG. Rozważmy prostokąt o bokach a, b oraz przekątnej d. Oznaczmy przez S, L odpowiednio pole i obwód tego prostokąta, czyli $S = ab$ oraz $L = 2(a+b)$. Zauważmy, że

$$d^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2S.$$

Wobec tego długości przekątnych danych prostokątów są równe.

3. Zadanie pochodzi z III etapu IV OMG. Wykorzystując nierówność trójkąta ACS uzyskujemy:

$$|AC| + |CS| > |AS| = |DS| = |CD| + |CS|.$$

Zatem $|AC| > |CD|$. Analogicznie, wykorzystując nierówność trójkąta BCS, dowodzimy, że $|BC| > |CD|$. Dodając stronami dwie ostatnie nierówności otrzymujemy $|AB| > 2|CD|$, co należało udowodnić.

4. Zauważmy, że $ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1$. Zatem układ równań podany w treści zadania można przekształcić do postaci:

$$\begin{cases} (a+1)(b+1) = 525 \\ (b+1)(c+1) = 147 \\ (c+1)(d+1) = 105 \end{cases}.$$

Zauważmy, że $147 = 49 \cdot 3 = 7^2 \cdot 3$. Skoro $b + 1 > 1$ jest liczbą całkowitą, a także $c + 1$ jest liczbą całkowitą większą niż 1, to dostajemy trzy przypadki:

- $b + 1 = 3$. Wówczas $c + 1 = 49$. To jest jednak sprzeczne z trzecim równaniem, ponieważ 105 nie jest podzielne przez 49.
- $b + 1 = 7$. Wówczas $c + 1 = 21$, a zatem $a = 74, b = 6, c = 20, d = 4$. Jednakże iloczyn tych liczb nie jest równy 8!, ponieważ a jest podzielna przez 37.
- $b+1 = 21$. Wówczas $a = 24, b = 20, c = 6, d = 14$. Zatem $abcd = (8 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (6) \cdot (2 \cdot 7) = 8!$. Zatem $a - d = 10$.

Odpowiedź zatem wynosi 10.

5. Niech N oznacza liczbę księgowych w zespole początkowym, zaś R – liczbę księgowych relegowanych w każdej godzinie do nowego zadania. Każdy księgowy rozlicza 30 faktur w ciągu godziny. Zatem przez pierwszą godzinę rozliczono $30N$ faktur. W drugiej godzinie rozliczono $30(N - R)$ faktur.

W trzeciej godzinie rozliczono $30(N-2R)$ faktur. W ciągu 10 minut czwartej godziny rozliczono $30(N-3R)\cdot 1/6 = 5(N-3R)$ faktur. Łącznie rozliczono 1775 faktur. Mamy zatem równość:

$$30N + 30(N-R) + 30(N-2R) + 5(N-3R) = 1775 \Rightarrow 95N - 105R = 1775 \Rightarrow 19N - 21R = 355.$$

Rozważmy reszty z dzielenia tej równości przez 21. Liczba $19N - 21R$ daje przy dzieleniu przez 21 taką samą resztę, co $19N$. Natomiast 355 daje przy dzieleniu przez 21 również resztę 19. Zatem mamy równość $19N = 19(mod\, 21)$. Zatem N daje przy dzieleniu przez 21 resztę 1. Zauważmy, że jeśli $N = 1$, to zgodnie z równością $19N - 21R = 355$ liczba R jest ujemna, co nie jest możliwe. Jeśli natomiast N jest większe niż 22, a więc równe $21k+1$, dla $k > 1$, to $19(21k+1) - 21R = 355$. Stąd $399k - 21R = 336$, czyli $19k - R = 16$, a zatem $R = 19k - 16$. Wówczas jednak $N - 3R = 21k + 1 - 3(19k - 16) = 49 - 36k$, co jest mniejsze od 0, dla $k > 1$. Ten układ jest zatem także niemożliwy. Pozostaje zatem przypadek, gdy $N = 22$. Wówczas $R = 3$. Zatem w ciągu 90 minut posortowano $30N + 15(N-R) = 945$ faktur.

Dzień trzeci - grupa młodsza

1. Czy prostokąt o wymiarach 90×91 można podzielić na prostokąty o wymiarach 9×10? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeśli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbą $a+b$.

3. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n liczba $\frac{n}{20-n}$ jest kwadratem liczby całkowitej?

4. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt M jest takim punktem boku AC, że $|MC| = 2 \cdot |MA|$. Punkty K i L leżą na boku BC tak, że $|BK| = |KL| = |LC|$. Wykaż, że:

$$\measuredangle AKM + \measuredangle ALM = 30^\circ.$$

5. Wykaż, że:

$$\frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2010} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010}.$$

Dzień trzeci - grupa młodsza - rozwiązania

1. Liga zadaniowa OMG (Seria II, 2012/2013). Tak, można. Wystarczy zauważyć, że z 9 prostokątów o wymiarach 10×9 można złożyć prostokąt o wymiarach 90×9, a z 10 prostokątów o wymiarach 9×10 można złożyć prostokąt o wymiarach 90×10. Z kolei prostokąt 90×91 można złożyć z 9 prostokątów o wymiarach 90×9 i jednego prostokąta o wymiarach 90×10.

2. Zadanie z II etapu VI OMG. Ponieważ $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, więc $b^2 = (b-a)(a+b) + a^2$. Prawa strona ostatniej równości jest podzielna przez liczbę $a+b$, a zatem liczba b^2 jest także podzielna przez liczbę $a+b$.

3. Załóżmy, że dla pewnego n mamy $\frac{n}{20-n} = k^2$. Wówczas po elementarnych przekształceniach otrzymujemy $n = \frac{20k^2}{k^2+1}$. Ponieważ n jest liczbą całkowitą, to ułamek powyższy musi być skracalny. Skoro k^2 oraz k^2+1 są względnie pierwsze, to k^2+1 musi być dzielnikiem liczby 20. To jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 0, 1, 2, 3$. Odpowiadające wartości n są równe $0, 10, 16, 18$. Skoro n ma być liczbą dodatnią, to odpowiedzią jest trójka liczb: $10, 16, 18$.

4. Zadanie z Internetowego Koła Matematycznego OMG. Wybierzmy na boku AB taki punkt N, że $|NB| = 2 \cdot |NA|$. Ponieważ $\frac{|CL|}{|LB|} = \frac{|AN|}{|NB|}$, więc $LN||AC$ - z twierdzenia odwrotnego do tw. Talesa. Ponadto $\frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CK|}{|BK|}$, więc $MK||AB$, a stąd $\measuredangle BNL = 60^\circ = \measuredangle KMC$. Zatem

$$\measuredangle ANL = \measuredangle AMK = 120^\circ.$$

Ponadto $|AN| = |AM|$ oraz $|LN| = |KM|$. Oznacza to, że trójkąty AMK i ANL są przystające. Stąd $\measuredangle AKM = \measuredangle ALN$.

Wybierzmy teraz na boku AC punkt P taki, że $|AP| = 2 \cdot |CP|$. Niech ponadto punkt Q będzie punktem przecięcia odcinków MK i LN. Zauważmy, że czworokąt $MQLP$ jest rombem o kącie ostrym równym 60°. Ponieważ przekątne w rombie są dwusiecznymi kątó, więc:

$$\measuredangle AKM + \measuredangle ALM = \measuredangle ALN + \measuredangle ALM = \measuredangle QLM = 30^\circ.$$

5. Zadanie z Internetowego Koła Matematycznego OMG. Przekształcając prawą stronę, dostajemy kolejno:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} =$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2010}\right) =$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010} - \left(1 + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{2010}\right) =$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1005}\right) = \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2010}.$$